**Polinomios de Legendre**

* [Introducción](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-6#INTRODUCTION)
* [Polinomios de Legendre](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-6#LEGENDRE_POLYNOMIALS)
* [Evaluación recursiva](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-6#RECURSIVE_EVALUATION)
* [Ortogonalidad](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-6#ORTHOGONALITY)
* [Normalización](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-6#NORMALIZATION)
* [Cálculo de los coeficientes](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-6#COMPUTING_COEFFICIENTS)
* [Evaluación](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-6#EVALUATION)
* [Asignación](http://www.fim.utp.ac.pa/Members/fernando.castillo/metodos-numericos/laboratorio-parte-1/laboratorio-6#ASSIGNMENT)

**Introducción**

Para **interpolar** de una fórmula o datos de una función **f(x)**, se hace necesario generar un model **p(x)** que pases por todo el set de datos. Ahora se considerará la aproximación del modelo que debe de reunir otras condiciones que dicho model también debe de satisfacer.

Como se hizo con la interpolacion, el modelo se construirá con funciones básicas. Lo que se obtiene es una especie de receta, los coeficientes lineales  **c** que establecen que tanto las funciones bases se deben de utilizar para construir el modelo.

**Polinomios de Legendre**

Los polinomios de Legendre es la base para el set de polinomios y apropiados para utilizarlos en el intervalo  [-1,1]. Los primeros polinomios de  Legendre son::

P0(x) = 1  
P1(x) = x  
P2(x) = ( 3 x2 - 1 ) / 2  
P3(x) = ( 5 x3 - 3 x ) / 2  
P4(x) = ( 35 x4 - 30 x2 + 3 ) / 8

**Evaluación recursiva**

El valor **x** de cualquier polinomio de Legendre **Pi** se puede determinar utilizando la siguiente recursión:

P0(x) = 1  
P1(x) = x  
...  
Pi(x) = ( (2\*i-1) \* x \* Pi-1(x) - (i-1) \* Pi-2(x) ) / i

**Ejercicio**: Escriba una rutina con el nombre *legpoly.m* para evaluar el i-ésimo polinomio de Legendre **Pi(x)**. Esta puede tener la forma:

function pval = legpoly ( i, x )

No tiene que escribor el código ya que se le provee en la página web. El código si lo prefiere, debe ser algo como:

if i es 0 or 1  
 haga pval y regrese  
 de otra forma  
 p(0) = 1  
 p(1) = x  
 for j from 2 to i  
 p(j) = ?  
  
 pval = ?

Recuerde que Matlab no reconoce como índice del vector al 0. Así es que la rutina debe de comenzar desde uno (1).

Para probar la rutina, utilice x=-0.5:

P\x| -0.5 0.0 1.0  
 ---+----------------------------  
 P0 | 1.0000 1.0000 1.0000  
 P1 | -0.5000 0.0000 1.0000  
 P2 | -0.1250 -0.5000 1.0000  
 P3 | 0.4375 0.0000 1.0000  
 P4 | -0.2891 0.3750 1.0000  
 P5 | -0.0898 0.0000 1.0000

**Ortogonalidad**

Los polinomios de Legendre son la base del espacio lineal de los polinomios. Una propiedad que es buena para cualquier vector base es que sea ortogonal. Si se está trabajando con vectores geométricos regulares, al dibujarlos se verá esta condición. En espacios vectoriales generalizados, se define el producto punto, y se dice que dos vectores **f(x)** y **g(x)**son ortogonales si el producto punto **(f,g)** es igual a cero.

Para cualquier par de **f(x)** y **g(x)** de funciones contínuas en el intervalo [-1,1],  el producto punto **(f,g)** será la integral de -1 a 1 de **f(x)\*g(x)**. Con este producto punto, si **i** =/= **j**, entonces:

( Pi(x), Pj(x) ) = 0

mientras

( Pi(x), Pi(x) ) = 2 / ( 2 \* i + 1 )

*Nota*: Para calcular el producto punto de dos vectores fila, uno de ellos debe de ser traspuesto.

dot = v \* w';

y si hay diferencia a cual vector se le pone apóstrofe.

**Ejarcicio**: Utilice su rutina de polinomios de Legendre, *legpoly*, y estime los productos punto siguientes:

* ( P3(x), P5(x) )
* ( P4(x), P4(x) )
* ( P0(x), P8(x) )

¿Qué debería darle?

**Normalización**

En álgebra lineal, la longitud de un vector se puede calcular como

||v|| = sqrt ( v, v )

De la misma manera, para el espacio vectorial generalizado, la longitud de un vector es la norma L2, que es la raíz cuadrada del producto punto del vector.

Se hace de utilida que el polinomio de Legendre tenga longitud unitaria. De aquí en adelante se utilizarán polinomios de Legendre normalizados.

**Ejercicio**: Utilice los polinomios de Legendre normalizados y estime la norma L2 de:

* P0(x)
* P4(x)
* P8(x)

Si el resultado que le da en diferente a 1, debe de estar haciendo algo mal. Si resulta que no en exactamente igual a uno (1), puede explicar el porqué?  Y si resulta que da resultado mucho más grande que uno (1) al ir aumentando el grado, puede explicar el porqué?

**Cálculo de los coeficientes**

Una función **f(x)** definida en [-1,1] se puede aproximar por el polinomio:

c0 \* P0(x) + c1 \* P1(x) + ...+ cn \* Pn(x)

Los coeficientes **c** se pueden calcular utilizando el producto punto.

ci = ( f, Pi )

**Ejercicio**: Escriba una rutina *legcoef.m* para calcular los coeficientes de Legendre  para una función **f(x)**.Esta puede tener la forma:

function c = legcoef ( n, f )

Esta deberá calcular los productos punto **c(i+1) = ( f, Pi )**, de **i** = 0 a **n**. La rutina se vería de la forma:

xvec = ?  
fvec = ?  
para i desde 0 a n  
 pvec = ?  
 c(i+1) = integral aproximada de f(x) \* Pi(x)

Pruebe la rutina para calcular la aproximación de Legendre de la función **ex** con **n** = 5. Compárelos con los valores siguientes:

i | 0 1 2 3 4 5 --|--------------------------------------  
c | 1.661985 0.901117 0.226302 0.037660 0.004698 0.000469

**Evaluación**

Dada la función **f** definida en el intervalo [-1,1], se puede calcular los coeficientes **c** al calcular el producto punto. Entonces, para evaluar la aproximación el  punto **x**, solamente se suma **c0** por **Po** + **c**1 por **P1** + ... + **cn** por **Pn**.

**Ejercicio**: Escriba una rutina *legval.m* para aproximar la función **f(x)** en el intervalo [-1,1] al dársele los coeficientes de Legendre.

function pvec = legval ( c, x )

Aquí, defina **n** que sea uno menos que la longitud del vector **c**, de al manera que **c(1)** contenga el coeficiente **c0**, y **c(n+1)** contenga **cn**. Se requiere calcular el punto o el vector **x**. Su código sería:

n = length ( c ) - 1;  
  
 pvec = zeros ( size ( x ) )  
 for i desde 0 to n  
 p = ?  
 pvec = pvec + ?

**Ejercicio**: Pruebe su rutina de evaluación, al evaluar la aproximación de **ex** del ejecricio previo. Grafique el valor verdadero y el aproximado para el intervalo [-1,1]. Una vez que ha calculado los coeficientes, grafique la aproximación. Y haga lo siguiente:

c = legcoef ( n, f )  
x = linspace ( -1, 1, 101 )  
y = exp ( x )  
p = legval ( c, x )

También puede graficar el error **p-y**  y ver si este oscila de la manera que se discutió.

**Asignación**

Calcule el polinomio de aproximación de la función

**y = atan ( 5 \* x )**

en el intervalo [-1,1], utilizando las seis primeras funciones base. Envíe sus resultados a mi correo lo siguiente:

* Los valores de los 6 coeficientes de Legendre;
* Explique brevemente el patrón de oscilación de los coeficientes.